Hommage au Professeur
Miron Nicolescu
pour son 70e anniversaire

OPÉRATEURS ABSOLUMENT CONTINUS

PAR

CONSTANTIN P. NICULESCU

On introduit une nouvelle classe d'opérateurs, nommés absolument continus parce que par l'isomorphisme naturel concernant l'équivalence des théories présentées par Halmos et Bourbaki ils correspondent aux mesures absolument continues. Divers résultats concernant les opérateurs faiblement compacts et les treillis de Banach dont la topologie est (o)-continue sont présentés aussi.

INTRODUCTION

On sait que dans la théorie de la mesure la continuité absolue joue un rôle essentiel dans un grand nombre de questions. La présente note se propose de généraliser cette notion en définissant une relation de continuité absolue entre des opérateurs et des fonctionnelles.

Le résultat principal affirme l'identité de la classe des opérateurs absolument continus et positifs de $\mathfrak{L}(\mathbf{C}(\mathbf{S}), \mathbf{X})$ ($\mathbf{S}$ un espace compact de Hausdorff et $\mathbf{X}$ un espace ordonné de Banach) et la classe des opérateurs faiblement compact et positifs. En particulier, il résulte que tout opérateur compact de $\mathfrak{L}(\mathbf{C}(\mathbf{S}), \mathbf{X})$ est absolument continu. Toutefois il semble plausible que l'énoncé principal soit vrai sans la condition de positivité[1].

Pour faciliter la lecture nous avons introduit dans le § 1. toutes les notions concernant la théorie de la mesure. Dans le § 2. nous avons présenté un théorème d'isomorphisme algébrique entre l'espace des mesures définies sur un anneau de Boole $\mathcal{C}$ et l'espace des mesures de Radon définies sur l'espace de Stone associé à $\mathcal{C}$. Par cet isomorphisme les mesures à variation finie et les opérateurs absolument sommables se correspondent. Le résultat principal de § 3 montre que par le même isomorphisme les mesures absolument continues positives et les opérateurs absolument continus positifs se correspondent également (voir th.3.4.).

---

[1] La réponse à cette question est positive. Voir [15].

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., TOME XIX, No 2, P. 225–236, BUCAREST, 1974

7 — c. 3563

Enfin, dans le § 4, nous donnons la caractérisation des treillis σ-complets et séparables de Banach dont la topologie est (o)-continue. Ils sont précisément les treillis σ-complets et séparables de Banach **X**, sur lesquels il existe une structure (moins fine) de AL-espace qui induit sur tout intervalle au sens de l'ordre la même topologie que **X** (théorème 4.6). Dans un tel espace tout intervalle au sens de l'ordre est relativement faiblement compact.

§ 1. GÉNÉRALITÉS SUR LA THÉORIE DE LA MESURE

Dans ce qui suit nous voulons préciser les notions concernant la théorie de la mesure développée sur des treillis de Boole. Cette théorie est importante par ses applications parmi lesquelles nous citons : la théorie spectrale (le cas des algèbres de projecteurs, voir [5]) et la théorie des probabilités (voir [14]).

Nous commençons par la suivante :

1.1. DÉFINITION. Un treillis $\mathcal{C}$ sera nommé un anneau de Boole si pour tout $x \in \mathcal{C}$ l'ensemble $\mathcal{C}_x = \{y \in \mathcal{C}\,;\, y \leqslant x\}$ est une algèbre de Boole par rapport à l'ordre induit.

1.2. *Remarque.* Dans un anneau de Boole il existe le plus petit élément **0**.

1.3. *Remarque.* Soit $\mathcal{C}$ un anneau de Boole et soit $x \leqslant y$ dans $\mathcal{C}$. Alors il existe et il est unique un $x^* \in \mathcal{C}$ tel que

$$x \wedge x^* = 0$$

$$x \vee x^* = y.$$

1.4. *Remarque.* La notion d'anneau de Boole a été présentée d'une manière équivalente par Kelley dans [9].

1.5. DÉFINITION. Un anneau de Boole $\mathcal{C}$ est dit un δ-anneau de Boole si $\mathcal{C}_x$ est une σ-algèbre de Boole pour tout $x \in \mathcal{C}$.

1.6. *Remarque.* Soit **T** un ensemble abstrait et soit $\mathcal{C}$ (respectivement $\mathcal{S}$) un clan (une semi-tribu) de parties de **T**. Alors $\mathcal{C}$ est un anneau de Boole (respectivement $\mathcal{S}$ un δ-anneau de Boole).

1.7. *Remarque.* Dans ce qui suit $\mathcal{C}$ désignera un anneau de Boole, $\mathcal{S}$ un δ-anneau de Boole et **X** un espace de Banach.

1.8. DÉFINITION. Une application $\mathbf{m} : \mathcal{C} \to \mathbf{X}$ est dite une mesure si :

$$x, y \in \mathcal{C},\ x \wedge y = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{m}(x \vee y) = \mathbf{m}(x) + \mathbf{m}(y).$$

Une mesure $\mathbf{m} : \mathcal{C} \to \mathbf{X}$ est dite σ-additive si pour toute suite $\{x_n\}_n$ d'éléments disjoints de $\mathcal{C}$ telle que $\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathcal{C}$, on a :

$$\mathbf{m}\Big(\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}(x_n)$$

où la série converge dans la topologie de **X**.

1.9. DÉFINITION. Soient $\mathbf{m} : \mathcal{C} \to \mathbf{X}$ et $\mu : \mathcal{C} \to \mathbf{R}_+$ deux mesures. On dit que $\mathbf{m}$ est absolument continue par rapport à μ et on écrit $\mathbf{m} \ll \mu$ si pour tout $\varepsilon > 0$, $x \in \mathcal{C}$ il existe $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ tel que :

$$y \in \mathcal{C}_x, \quad \mu(y) < \delta \ \Rightarrow \|\mathbf{m}(y)\| < \varepsilon$$

On doit rappeler ce résultat important (voir [1]) :

1.10. THÉORÈME. Pour toute mesure σ-additive $\mathbf{m} : \mathcal{T} \to \mathbf{X}$, $\mathcal{T}$ une σ-algèbre de parties, il existe une mesure σ-additive et positive $\mu : \mathcal{T} \to \mathbf{R}_+$ telle que $\mathbf{m} \ll \mu$.

La théorie développée ci-dessous nous permet d'énoncer ce résultat pour les σ-algèbres de Boole.

§ 2. LA CONSTRUCTION DE $\mathfrak{M}(\mathcal{C})$

Pour $x \in \mathcal{C}$ considérons l'ensemble des éléments $\sum\limits_{i \in F} \alpha_i x_i$ où $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $x_i \in \mathcal{C}_x$, $x_i \neq 0$, $x = \bigvee\limits_{i \in F} x_i$, $x_i \wedge x_j = 0 (i \neq j)$, F un ensemble fini arbitraire. Considérons également la relation d'équivalence suivante :

$$\Sigma \alpha_i e_i \sim \Sigma \beta_j f_j \Leftrightarrow \{e_i \wedge f_j \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_j\}.$$

Désignons par $\mathcal{E}_x(\mathcal{C})$ l'ensemble quotient. On peut munir $\mathcal{E}_x(\mathcal{C})$ d'une structure naturelle de treillis normé :

$$\widehat{\Sigma \alpha_i e_i} + \widehat{\Sigma \beta_j f_j} = \widehat{\Sigma (\alpha_i + \beta_j)\, e_i \wedge f_j},$$

$$\alpha \ \widehat{\Sigma \alpha_i e_i} = \widehat{\Sigma \alpha \alpha_i e_i},$$

$$\widehat{\Sigma \alpha_i e_i} \geqslant 0 \Leftrightarrow \alpha_i \geqslant 0,$$

$$\|\widehat{\Sigma \alpha_i e_i}\| = \sup |\alpha_i|.$$

Le complété de $\mathcal{E}_x(\mathcal{C})$ sera désigné par $\widehat{\mathcal{E}_x(\mathcal{C})}$. Alors on peut considérer les espaces localement convexes suivants :

$$\mathcal{E}(\mathcal{C}) = \varinjlim \mathcal{E}_x(\mathcal{C})$$

$$\mathfrak{M}(\mathcal{C}) = \varinjlim \widehat{\mathcal{E}_x(\mathcal{C})}.$$

$\mathfrak{M}(\mathcal{C})$ est un analogue de l'espace des fonctions totalement $\mathcal{C}$-mesurables. Voir aussi [4].

Pour $\mathbf{S}$ un espace localement compact de Hausdorff et $\mathbf{K} \subset \mathbf{S}$ un compact, considérons l'espace de Banach (muni de la norme sup) $\mathbf{C}(\mathbf{S}, \mathbf{K})$ des fonctions réelles et continues dont le support est contenu dans $\mathbf{K}$. Considérons l'espace vectoriel suivant

$$\mathbf{C}(\mathbf{S}) = \varinjlim_{K} \mathbf{C}(\mathbf{S}, \mathbf{K})$$

muni de la topologie limite inductive.

Un autre espace fondamental pour la théorie de la mesure est $\mathbf{Mes}_{\mathbf{X}}(\mathcal{C})$,l'espace de mesures $\mathbf{m} : \mathcal{C} \to \mathbf{X}$ ($\mathbf{X}$ est un espace localement convexe de Hausdorff) à semi-variation finie, c'est-à-dire telles que pour tout $x \in \mathcal{C}$ et toute semi-norme continue q sur $\mathbf{X}$ on ait :

$$\widetilde{\mathbf{m}}_q(x) = \sup q(\sum_{i \in F} \alpha_i \mathbf{m}(x_i)) < +\infty$$

où le sup est pris pour toutes les familles finies $\{\alpha_i\}_{i \in F}$ et $\{x_i\}_{i \in F}$ telles que $|\alpha_i| \leqslant 1$, $x_i \in \mathcal{C}_x$, $x_i \wedge x_j = 0$ $(i \neq j)$, F étant un ensemble fini arbitraire.

La liaison entre les espaces $\mathfrak{M}(\mathcal{C})$ et $\mathbf{C}(\mathbf{S})$ est donnée par la théorie de Stone concernant la représentation des algèbres de Boole. Pour $\mathcal{C}$ un anneau de Boole désignons par $\mathbf{S}$ l'espace (localement compact) de Stone associé à $\mathcal{C}$. On met en évidence une application injective φ définie sur $\mathcal{C}$ et à valeurs dans l'anneau des parties compactes et ouvertes de $\mathbf{S}$, telle que :

1. $$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \cup \varphi(y)$$
2. $$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \cap \varphi(y)$$
3. $$x \leqslant y \Leftrightarrow \varphi(x) \subset \varphi(y).$$
4. Pour tout compact $\mathbf{K} \subset \mathbf{S}$ il existe $x \in \mathcal{C}$ tel que $\mathbf{K} \subset \varphi(x)$.

On peut énoncer le suivant :

2.1. Théorème. Soient $\mathcal{C}$ un anneau de Boole, $\mathbf{S}$ l'espace de Stone associé à $\mathcal{C}$ et $\mathbf{X}$ un espace localement convexe séquentiellement complet de Hausdorff. Alors il existe un isomorphisme :

$$\mathfrak{M}(\mathcal{C}) \xrightarrow[\Phi]{\sim} \mathbf{C}(\mathbf{S})$$

algébriquement et topologiquement. On a :

$$\mathbf{Mes}_{\mathbf{X}}(\mathcal{C}) \xrightarrow[\sim]{\psi_{\mathbf{X}}} \mathfrak{L}(\mathfrak{M}(\mathcal{C}), \mathbf{X}),$$

algébriquement. De plus, pour $\mathbf{U}$ et $\mathbf{m}$ en correspondance on a

$$\sup_{\substack{f \in \mathbf{C}(\mathbf{S}, \varphi(A)) \\ \|f\| \leqslant 1}} q(\mathbf{U}(f)) = \widetilde{\mathbf{m}}_q(A),$$

où $A \in \mathcal{C}$ et q est une semi-norme continue sur $\mathbf{X}$.

La démonstration est facile.

Ce théorème réduit l'étude des mesures abstraites à celle des mesures de Radon.

2.2. *Remarque.* Si on suppose de plus que **X** est un espace localement convexe ordonné, c'est-à-dire si la topologie de **X** est donnée par une famille de semi-normes monotones, alors l'isomorphisme ψ_X est également au sens de l'ordre.

2.3. *Remarque.* Considérons le cas où $\mathcal{C}$ est une algèbre de Boole. Alors par l'isomorphisme $\psi_{\mathbf{X}}$ les mesures à variation finie [2] de $\mathbf{Mes}_{\mathbf{X}}(\mathcal{C})$ et les opérateurs absolument sommables de $\mathcal{L}(\mathbf{C}(\mathbf{S}), \mathbf{X})$ se correspondent.

Démonstration. On peut se restreindre facilement au cas des espaces de Banach. Cf. le théorème du prolongement des mesures à variation finie (voir [4] ch. I, § 5, th. 5) il reste à prouver que les opérateurs absolument sommables et les opérateurs majorés de $\mathcal{L}(\mathbf{C}(\mathbf{S}), \mathbf{X})$ sont les mêmes, résultat établi par Pietsch [11].

2.4. *Le prolongement des mesure vectorielles.* Pour tout espace normé **X** considérons l'espace $\mathcal{I}(\mathbf{X})$ des fonctions réelles et bornées, définies sur la boule unité de $\mathbf{X}^*$. Munissons $\mathcal{I}(\mathbf{X})$ des structures naturelles. Alors $\mathcal{I}(\mathbf{X})$ est un treillis complet de Banach, à l'unité forte. Désignons par $i_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \to \mathcal{I}(\mathbf{X})$ le plongement canonique. On peut énoncer le résultat suivant :

Proposition. Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ des algèbres de Boole, $\mathbf{m} : \mathcal{C} \to \mathbf{X}$ et $\mu : \mathcal{C}' \to \mathbf{R}_+$ des mesures à semi-variation finie, telles que

a.
$$\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$$

b.
$$\|\mathbf{m}(A)\| \leqslant \mu(A), \quad A \in \mathcal{C}.$$

Alors il existe une mesure $\mathbf{m}' \in \mathbf{Mes}_{\mathcal{I}(\mathbf{X})}(\mathcal{C}')$ telle que :

a′.
$$\mathbf{m}' | \mathcal{C} = i_{\mathbf{X}} \circ \mathbf{m}.$$

b′.
$$\|\mathbf{m}'(A)\| \leqslant \mu(A), \quad A \in \mathcal{C}'.$$

Démonstration. Soit $\mathbf{U} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathcal{C}), \mathcal{I}(\mathbf{X}))$, l'opérateur d'intégration associé à $i_{\mathbf{X}} \circ \mathbf{m}$. Alors :

$$\mathbf{U}(f) = \psi_{\mathcal{I}(\mathbf{X})}(i_{\mathbf{X}} \circ \mathbf{m})(f) = \int f \, \mathrm{d}(i_{\mathbf{X}} \circ \mathbf{m})$$

pour tout $f \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$. On a :

(*)
$$|\mathbf{U}(f)| \leqslant \left(\int |f| \, \mathrm{d}\mu\right) \mathbf{u}$$

---

[2]) Une mesure $\mathbf{m} : \mathcal{C} \to \mathbf{X}$ est dite à variation finie si pour tout $x \in \mathcal{C}$ et toute semi-norme continue sur **X**, q, on a :

$$\overline{\mathbf{m}}_q(x) = \sup \sum_{i \in F} q(\mathbf{m}(x_i)) < +\infty,$$

où le sup est pris pour toutes les décompositions disjointes et finies $\{x_i\}_{i \in F}$ de x dans $\mathcal{C}$.

où $\mathbf{u}$ représente l'unité de $\mathfrak{I}(X)$. Le théorème de Hahn-Banach dans la version de Kantorovich montre que $\mathbf{U}$ se prolonge à $\mathfrak{M}(\mathcal{C}')$ en conservant l'inégalité (*), c.q.f.d.

2.5. *Remarque.* Le plongement $i_{\mathbf{X}}$ est une isométrie. Les conditions de l'énoncé n'assurent pas l'unicité de $\mathbf{m}'$.

§ 3. OPÉRATEURS ABSOLUMENT CONTINUS

Dans son livre concernant l'intégration, Bourbaki présente le théorème de Lebesgue-Nikodym sous la forme suivante (voir [2], Ch. V, § 5, 5, th. 2) :

3.1. THÉORÈME. Pour μ et ν deux mesures de Radon positives, définies sur le même espace localement compact $\mathbf{T}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

a. $\nu \ll \mu$.

b. Pour tous $f \in \mathbf{C}(\mathbf{T}), f \geqslant 0$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$g \in \mathbf{C}(\mathbf{T}), \quad 0 \leqslant g \leqslant f, \int g \, \mathrm{d}\mu < \delta \Rightarrow \int g \, \mathrm{d}\nu \leqslant \varepsilon.$$

c. $\lambda \in \mathbf{C}(\mathbf{T})^*, \ \lambda \geqslant 0, \ \mu \wedge \lambda = 0 \Rightarrow \nu \wedge \lambda = 0.$

Ce résultat nous conduit à la considération d'une classe nouvelle d'opérateurs.

Dans ce qui suit $\mathbf{X}$ désignera un espace de Banach et $\mathbf{Z}$ un treillis localement convexe de Hausdorff. Par conséquent la topologie de $\mathbf{Z}$ est donnée par une famille de semi-normes solides

$$|x| \leqslant |y| \text{ dans } \mathbf{X} \Rightarrow p(x) \leqslant p(y).$$

3.2. DÉFINITION. Un opérateur $\mathbf{U} \in \mathfrak{L}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})$ est dit absolument continu par rapport à une fonctionnelle $z^* \in \mathbf{Z}^*$, $z^* \geqslant \mathbf{0}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ et $z \in \mathbf{Z}$, $z \geqslant \mathbf{0}$ il existe un $\delta > \mathbf{0}$ tel que

$$y \in \mathbf{Z}, \quad |y| \leqslant z, \ z^*(|y|) < \delta \Rightarrow \|\mathbf{U}(y)\| < \varepsilon.$$

Dans ce cas on note $\mathbf{U} \ll z^*$.

Un opérateur $\mathbf{U} \in \mathfrak{L}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})$ est dit absolument continu s'il existe un $z^* \in \mathbf{Z}^*$, $z^* \geqslant 0$, tel que $\mathbf{U} \ll z^*$. Désignons par $\mathbf{AC}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})$ le sous-espace vectoriel des opérateurs absolument continus de $\mathfrak{L}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})$.

3.3. *Remarques* :

1. Evidemment, tout opérateur de $\mathfrak{L}(\mathbf{L}^1(\mu), \mathbf{X})$ est absolument continu, mais la propriété reste vraie pour $\mathbf{Z}$ un treillis σ-complet de Banach, séparable qui, de plus, est un dual. Voir aussi 4.6 ci-dessous.

2. Tout opérateur absolument continu transforme les suites faiblement Cauchy et majorées au sens de l'ordre en suites convergentes. Par conséquent tout opérateur absolument continu de $\mathfrak{L}(\mathbf{C}(\mathbf{S}), \mathbf{X})$ est faiblement compact (voir [6]).

3. Tout opérateur majoré (intégral, ou absolument sommable au sens de Pietsch) de $\mathfrak{L}(\mathbf{C}(\mathbf{S}), \mathbf{X})$, $\mathbf{S}$ étant comme ci-dessus, un espace compact de Hausdorff, est aussi absolument continu, mais la classe des opérateurs absolument continus est strictement plus large.

4. L'application identique de $l^1_{\mathbf{N}}$ est absolument continue par rapport à la fonctionnelle $(1, 1, \ldots) \in l^\infty_{\mathbf{N}}$, mais elle n'est pas faiblement compacte.

5. Soient $\mathbf{Z}$ un treillis bornologique séquentiellement complet, de Hausdorff, et $\mathbf{X}$ un treillis complet de Banach, avec l'unité forte. Alors $\mathfrak{L}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})$ est un treillis complet. De plus[3] :

$$\mathbf{U} \ll z^* \Leftrightarrow |\mathbf{U}| \ll z^*.$$

6. On peut présenter la théorie des opérateurs absolument continus d'une manière équivalente, en considérant dans la définition 3.2 ci-dessus, au lieu des fonctionnelles $z^* \in \mathbf{Z}^*$, des mesures de Radon positives définies sur des parties $\mathbf{S}$, $\sigma(\mathbf{Z}^*, \mathbf{Z})$-fermées de $\mathbf{Z}^*$, pour lesquelles il existe des voisinages $\mathbf{U}$, de l'origine dans $\mathbf{Z}$, telles que

a. $\mathbf{S} \subset \mathbf{U}^\circ$,

b. $p_{\mathbf{U}}(z) = \sup\limits_{s \in \mathbf{S}} |< z, s >|$,

pour tout $z \in \mathbf{Z}$.

La notion d'opérateur absolument continu peut être introduite à partir de l'isomorphisme $\psi_{\mathbf{Y}}$ donné par le théorème 2.1 ci-dessus. Considérons les espaces vectoriels suivants :

$$\mathbf{Mes}_{\mathbf{X}}(\mathcal{S}, \mu) = \{\mathbf{m} \in \mathbf{Mes}_{\mathbf{X}}(\mathcal{S}) ;\ \mathbf{m} \ll \mu\}$$

pour $\mu : \mathcal{S} \to \mathbf{R}_+$ une mesure σ-additive.

$$\mathbf{AC}_{z^*}(\mathbf{Z}, \mathbf{X}) = \{\mathbf{U} \in \mathbf{AC}(\mathbf{Z}, \mathbf{X}) ;\ \mathbf{U} \ll z^*\}$$

pour $z^* \in Z^*$, $z^* \geqslant 0$.

Alors pour tout espace ordonné de Banach $\mathbf{Y}$, les espaces $\mathbf{Mes}_{\mathbf{Y}}(\mathcal{S}, \mu)$ et $\mathbf{AC}_{z^*}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$ sont des espaces vectoriels ordonnés par rapport à l'ordre canonique. Désignons par $\mathbf{Mes}^+_{\mathbf{Y}}(\mathcal{S}, \mu)$, respectivement par $\mathbf{AC}^+_{z^*}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$ les sous-espaces engendrés par les éléments positifs.

3.4. Théorème[3]. L'isomorphisme $\psi_{\mathbf{Y}}$ induit un isomorphisme :

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{Y}} : \mathbf{Mes}^+_{\mathbf{Y}}(\mathcal{S}, \mu) \simeq \mathbf{AC}^+_{\psi_{\mathbf{R}}(\mu)}(\mathbf{C}(\mathbf{S}), \mathbf{Y})$$

algébriquement et au sens de l'ordre.

Démonstration. Il suffit de prouver que dans le cas où $\mathcal{S}$ est une σ-algèbre de Boole on a :

$$\mathbf{m} \in \mathbf{Mes}_{\mathbf{Y}}(\mathcal{S}, \mu),\ \mathbf{m} \geqslant 0 \Rightarrow \psi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{m}) \ll \psi_{\mathbf{R}}(\mu).$$

[3]) Voir aussi [15].

Le théorème de Hoffmann-Jorgensen concernant le prolongement des mesures (voir [8]) permet d'identifier $\mathcal{S}$ avec la tribu de Borel de S. Parce que **m** est σ-additive, il résulte que $\psi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{m})$ est un opérateur faiblement compact de $\mathcal{L}(\mathbf{C}(\mathbf{S}), \mathbf{Y})$ (voir [6] prop. 14). Supposons que $\psi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{m}) \not\ll \mu$. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$, $a > 0$ et il existe également une suite $\{f_n\}_n$ de $\mathbf{C}(\mathbf{S})$ telle que

$$0 \leqslant f_n \leqslant a, \quad \int f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad \|\psi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{m})(f_n)\| \geqslant \varepsilon_0.$$

L'espace $\mathbf{M}(\mathbf{S})$ des fonctions $f : \mathbf{S} \to \mathbf{R}$ totalement $\mathcal{S}$-mesurables est un treillis σ-complet, sous-espace de $\mathbf{C}(\mathbf{S})^{**}$, bidual de $\mathbf{C}(\mathbf{S})$. On peut considérer dans $\mathbf{M}(\mathbf{S})$ les éléments suivants :

$$g_n = \bigvee_{k=n}^{\infty} f_k,$$

$$g = \bigwedge_{n=1}^{\infty} g_n.$$

On considère le sup et l'inf ponctuels. Alors :

$$\int g \,\mathrm{d}\mu = 0$$

donc :

$$((\psi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{m}))^{**}|_{\mathbf{M}(\mathbf{S})})(g) = 0.$$

Du théorème de Lebesgue concernant la convergence dominée il résulte

$$\text{a.} \quad \psi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{m})^{**}|_{\mathbf{M}(\mathbf{S})}(g_n) \to 0, \quad \sigma(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}^*).$$

De plus :

$$\text{b.} \quad 0 \leqslant (\psi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{m})^{**}|_{\mathbf{M}(\mathbf{S})})(g_n) \downarrow .$$

Alors a. et b. entraînent (en vertu du théorème de Dini, [12] ch. V, th. 4.3) que $\psi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{m})^{**}|_{\mathbf{M}(\mathbf{S})}(g_n) \to 0$ dans **X**. D'autre part on a

$$\text{c.} \quad \|\psi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{m})(g_n)\| \geqslant \|\psi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{m})(f_n)\| \geqslant \varepsilon_0$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$, contradiction.

3.5. Corollaire. Pour tout espace de Banach **X** on a l'isomorphisme d'espaces vectoriels ordonnés suivants :

$$\mathbf{Mes}^+_{\mathcal{J}(\mathbf{X})}(\mathcal{S}, \mu) \to \mathbf{AC}_\mu(\mathbf{C}(\mathbf{S}), \mathcal{J}(\mathbf{X})).$$

3.6. Corollaire. Soient S un espace compact de Hausdorff et **U** un opérateur positif de $\mathcal{L}(\mathbf{C}(\mathbf{S}), \mathbf{Y})$. Alors **U** est faiblement compact si, et seulement si, $\mathbf{U}$ est absolument continu. Dans ce cas il existe un $y^* \in \mathbf{Y}^*$, tel que $\mathbf{U} \ll |y^* \circ \mathbf{U}|$. De plus :

$0 \leqslant \mathbf{V} \leqslant \mathbf{U}$, $\mathbf{U}$ faiblement compact $\Rightarrow \mathbf{V}$ faiblement compact.

Pour la démonstration il suffit de rappeler le résultat suivant obtenu par Rybakov ((voir Matematicheskie zametki (1970, 7, 247—254). Pour toute mesure σ-additive $\mathbf{m} : \mathcal{T} \to \mathbf{Y}$, $\mathcal{T}$ une algèbre de parties, il existe un $y^* \in \mathbf{Y}^*$, tel que $m \ll |y^* \circ m|$.

3.7. Corollaire. Tout opérateur compact de $\mathfrak{L}(\mathbf{C}(\mathbf{S}), \mathbf{X})$ est absolument continu.

Comme l'a montré Krengel (Bull. Amer. Math. Soc. (1966, **72**), 132—133) l'espace des opérateurs linéaires et compacts $\mathbf{U} : \mathbf{C}(\mathbf{S}) \to \mathfrak{I}(\mathbf{X})$ est un treillis.

3.8. *Théorème de Jordan vectoriel.* Le théorème 3.4. nous conduit à considérer la notion suivante :

Définition. Une mesure à semi-variation finie $m : \mathcal{C} \to X$ est dite strictement absolument continue si l'opérateur associé par le théorème 2.1 provient de $\mathbf{AC}(\mathbf{C}(\mathbf{S}), \mathbf{X})$. La mesure $\mathbf{m}$ est dite strictement absolument continue par rapport à une mesure $\mu : \mathcal{C} \to \mathbf{R}_+$ si l'opérateur associé provient de $\mathbf{AC}_\mu(\mathbf{C}(\mathbf{S}), \mathbf{X})$. On note $\mathbf{m} \{\{ \mu$.

Evidemment $\mathbf{m} \{\{ \mu \Rightarrow \mathbf{m} \ll \mu$, mais la réciproque n'est pas vraie. Les cas les plus importants quand on a la réciproque sont les suivants :

a. $\mathbf{m}$ est majorée par μ.

b. $\mathbf{m}$ et μ sont des mesures σ-additives et positives, définies sur un δ-anneau de Boole.

La continuité absolue stricte intervient d'une manière essentielle dans la généralisation du théorème de Jordan au cas vectoriel. Nous pouvons énoncer le suivant :

Théorème. Pour $\mathbf{m} : \mathcal{T} \to \mathbf{X}$ une mesure σ-additive, $\mathcal{T}$ une algèbre de Boole, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathbf{m}$ est strictement absolument continue.

(2) $i_{\mathbf{X}} \circ \mathbf{m} = \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2$,

où $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$ sont des mesures σ-additives de $\mathbf{Mes}_{\mathfrak{I}(\mathbf{X})}(\mathcal{T})$, $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \geqslant 0$.

Du résultat cité de Krengel on déduit facilement que toute mesure σ-additive $\mathbf{m} : \mathcal{T} \to \mathbf{X}$ est strictement absolument continue si elle est compacte.

3.9. La théorie des opérateurs absolument continus peut être présentée entièrement à partir des résultats exposés par R. Cristescu dans [3], surtout ch. VII, n° 3. En particulier, dans la démonstration du Théorème 3.4 ci-dessus, on peut éviter l'utilisation du théorème de Lebesgue.

D'ailleurs notre résultat 3.4. est un analogue topologique du théorème principal établi par R. Cristescu dans [3], ch. VII, n° 3.

§ 4. LA CONDITION (*)

Le théorème 3.4, et particulièrement sa démonstration, nous conduit à la considération des opérateurs $\mathbf{U} \in \mathfrak{L}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})$ pour lesquels il existe un $z^* \in \mathbf{Z}^*$, $z^* \geqslant 0$ tel que :

(*) $$\operatorname{Ker} z^* \cap \mathbf{Z}_+ \subset \operatorname{Ker} \mathbf{U}.$$

Cette condition est assez restrictive car l'application identique de l_I^2 (Card $\mathbf{I} > \aleph_0$) ne la satisfait pas.

Tout opérateur absolument continu satisfait trivialement à la condition (*), mais la réciproque n'est pas vraie.

La démonstration du théorème 3.4 nous assure que sous les hypothèses suivantes la condition (*) implique la continuité absolue :

1. $\mathbf{Z}$ un treillis σ-complet localement convexe.
2. $z^* \in \mathbf{Z}^*$, $z^* \geqslant 0$ satisfait à la condition suivante :

$$z^*\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} z_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} z^*(z_n)$$

pour toute suite majorée $\{z_n\}_n$ de $\mathbf{Z}_+$.

3. $\mathbf{X}$ est un espace ordonné de Banach.
4. $\mathbf{U} \in \mathfrak{L}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})$, $\mathbf{U} \geqslant \mathbf{0}$ et de plus:

$$z_n \downarrow 0 \text{ au sens de l'ordre} \Rightarrow \mathbf{U}(z_n) \to 0.$$

4.1. *Remarque.* Les conditions 1 et 2 ci-dessus sont satisfaites par exemple pour $\mathbf{Z}$ un treillis σ-complet localement convexe dont la topologie est (o)-continue. C'est le cas des espaces $\mathbf{L}^p(\mu)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ ou des treillis nucléaires complets.

Les résultats obtenus par Y. Komura et S. Koshi dans [10] nous permettent d'énoncer dans le cas des treillis nucléaires le suivant :

4.2. THÉORÈME. Soient $\mathbf{Z}$ un treillis nucléaire réflexif et $\mathbf{X}$ un treillis complet de Banach à l'unité forte. Alors :

a. La condition (*) équivaut à la continuité absolue.

b. $\mathfrak{L}(\mathbf{Z}, \mathbf{X}) = \mathbf{AC}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})$.

c. Pour tout $z^* \in \mathbf{Z}^*$, $z^* \geqslant 0$ l'espace $\mathbf{AC}_{z^*}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})$ est un sous-espace normal[4] de $\mathfrak{L}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})$.

Démonstration. D'abord, observons que tout operateur $\mathbf{U} \in \mathfrak{L}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})$ satisfait à la condition (*), donc il est absolument continu. En effet, la topologie de $\mathbf{Z}$ est engendrée par la famille de semi-normes :

$$\|x\|_{z^*} = z^*(|x|)$$

où $x \in Z$ et $z^* \in Z_+^*$. La réflexivité de Z implique la complétitude au sens de la topologie (voir [13], ch. V, Théorème 7.4) et par conséquent au sens de l'ordre (voir [10]). Donc $\mathfrak{L}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})$ est un treillis complet. Avec la remarque que la topologie d'un treillis nucléaire est (o)-continue il résulte a et b. Il reste à prouver c. A cette fin il suffit de considérer une famille $\{\mathbf{U}_\alpha\}$ majorée et filtrante d'éléments positifs de $\mathbf{AC}_{z^*}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})$. Pour tout $z \in \mathbf{Z}, z \geqslant 0$ on a :

$$(\sup_\alpha \mathbf{U}_\alpha)(z) = \sup_\alpha \mathbf{U}_\alpha(z).$$

Alors

$$z \in \mathbf{Z},\ z \geqslant 0,\quad z^*(z) = 0 \Rightarrow (\sup_\alpha \mathbf{U}_\alpha)(z) = 0$$

c.q.f.d.

---

[4]) Au sens de [3], définition 1, page 94.

4.3. COROLLAIRE. Sous les hypothèses du théorème 4.2 ci-dessus pour tout $z^* \in Z^*$, $z^* \geqslant 0$ on a :

$$\mathfrak{L}(\mathbf{Z}, \mathbf{X}) = \mathbf{AC}_{z^*}(\mathbf{Z}, \mathbf{X}) \oplus \mathbf{AC}_{z^*}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})^{\perp}.$$

Donnons enfin une classe assez large d'opérateurs, non nécessairement absolument continus, mais qui satisfont à la condition (*) :

4.4. LEMME*. Soient $\mathbf{Z}$ un treillis bornologique séquentiellement complet, et $\mathbf{X}$ un espace normé séparable. Alors pour tout $\mathbf{U} \in \mathfrak{L}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})$ il existe un $z^* \in \mathbf{Z}^*$, $z^* \geqslant 0$ tel que :

$$z \geqslant 0, \quad z^*(z) = 0 \Rightarrow \mathbf{U}(z) = 0.$$

Démonstration. Par l'hypothèse $\mathbf{X}^*$ est $\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})$ séparable, donc il existe une suite $\{x_n^*\}_n$, $\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})$ dense dans la boule unité de $\mathbf{X}^*$. Désignons par $i_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \to \mathfrak{I}(\mathbf{X})$ le plongement de X dans $\mathfrak{I}(\mathbf{X})$. Alors $\mathfrak{L}(\mathbf{Z}, \mathfrak{I}(\mathbf{X}))$ est un treillis complet et on peut considérer la fonctionnelle :

$$z^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(|i_{\mathbf{X}} \circ \mathbf{U}|(z) \right) (x_n^*).$$

Du fait que pour tout $z \geqslant 0$ on a :

$$|i_{\mathbf{X}} \circ \mathbf{U}|(z) = \sup_{|z'| \leqslant z} |(i_{\mathbf{X}} \circ \mathbf{U})(z')|,$$

il résulte que la série qui définit z^* est absolument sommable. Pour tout $z \in \mathbf{Z}$, $z \geqslant 0$ la fonction $|i_{\mathbf{X}} \circ \mathbf{U}|(z)$ est $\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})$-inférieurement continue sur la boule unité de $\mathbf{X}^*$. Par conséquent :

$$z \in Z, \; z \geqslant 0, \; z^*(z) = 0 \Rightarrow \mathbf{U}(z) = 0.$$

c.q.f.d.

4.5. COROLLAIRE. Soient $\mathcal{S}$ un δ-anneau de Boole, $\mathbf{X}$ un espace séparable de Banach et $\mathbf{m} : \mathcal{S} \to \mathbf{X}$ une mesure σ-additive. Alors il existe une mesure σ-additive $\mu : \mathcal{S} \to \mathbf{R}_+$ telle que $\mathbf{m} \ll \mu$. Supposons de plus que X est un espace ordonné de Banach et que $\mathbf{m}$ est positive. Alors $\mathbf{m}\{\{ \mu$.

Démonstration directe. Soit $\{x_n^*\}_n$ comme dans la démonstration du lemme. Considérons les mesures σ-additives $\mu_n : \mathcal{S} \to \mathbf{R}$ définies par

$$\mu_n(A) = x_n^*(\mathbf{m}(A)).$$

Alors la mesure σ-additive $\mu : \mathcal{S} \to \mathbf{R}_+$, définie par

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\mu_n| (A)$$

satisfait aux conditions du corollaire (voir aussi le théorème 3.4. ci-dessus) c.q.f.d.

---

* Ce résultat a été formulé pendant une discussion avec M. S. Teleman.

Il semble plausible que la condition de séparabilité de **X** soit superflue.

Du lemme 4.4 il résulte facilement qu'on a la caractérisation suivante des treillis de Banach, dont la topologie est o-continue :

4.6. Théorème. Soit X un treillis σ-complet de Banach, séparable. Alors il existe un $x^* \in X^*$, $x^* \geqslant 0$ tel que :

$$\operatorname{Ker} x^* \cap \mathbf{X}_+ = \{\mathbf{0}\}$$

Supposons de plus que la topologie de **X** est o-continue. Alors pour tous $x \in \mathbf{X}$, $x \geqslant 0$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|y| < x, \quad x^*(|y|) < \delta \Rightarrow \|y\| < \varepsilon$$

c'est-à-dire il existe sur **X** une structure de **AL**-espace (moins fine) qui induit sur tout intervalle une topologie plus fine.

4.7. Corollaire. Soit **X** un treillis de Banach, séparable, dont la topologie est (o)-continue. Alors tout intervalle au sens de l'ordre est relativement faiblement compact.

Reçu le 4 octobre 1971

Institut de Mathématiques
de l'Académie, Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. Bartle R. G., Dunford N., Schwartz J., Canad. J. Math., 1955, *7*, 289–305.
2. Bourbaki N., *L'intégration*. Hermann, Paris.
3. Cristescu R., *Espaces linéaires ordonnés et des opérateurs linéaires*. Ed. Academiei, Bucarest, 1970.
4. Dinculeanu N., *Vector measures*. Berlin, 1966.
5. Dunford N., Schwartz J., *Linear operators*. III^e Partie : *Spectral Operators*, New York, 1971.
6. Grothendiek A., Canad. J. Math., 1953, *5*, 129–173.
7. Halmos P., *Measure theory*. 1950.
8. Hoffmann-Jorgensen, *Vector measures*. Math. Scandinavica, 1971, **28**, *1*, 5–32.
9. Kelley J., *General topology*. Van Nostrand, 1957.
10. Komura Y., Koshi S., Math. Ann., 1966, **163**, 105–110.
11. Pietsch A., *Nukleare lokalkonvexe Raume*. Berlin, 1967.
12. Stone M. H., Trans. Amer. Math. Soc., 1936, **40**, 37.
13. Schaeffer H., *Topological vector spaces*. New York, 1966.
14. Vladimirov D. A., *Bulevy algebry*. 1969, Moscou.
15. Niculescu C., *Jordan decomposition and locally absolutely continuous operators* (à paraître).